

## OPTIMÁLIS ERŐFORRÁS-TERVEZÉS

### BEVEZETÉS

Egy (beruházás, innovációs stb.) projekt megvalósításánál három fontos szempontot kell szem előtt tartanunk: a lehető legrövidebb idő alatt, a lehető legkisebb költséggel kell a projektet megvalósítanunk úgy, hogy a rendelkezésre álló erőforrásainkat (munkaerő, anyagok, gépek stb.) ne lépjük túl. [1]

Miért is fontos, hogy a lehető legrövidebb idő alatt és a lehető legkisebb költséggel valósítsuk meg a projektet? Ha egy beruházás megvalósítására több cég vagy szervezet pályázik, akkor általában annak a pályázónak van nagyobb esélye a kiírt tender elnyerésére, aki hamarabb és kevesebb költséggel tudja a beruházást megvalósítani. Ezt a problémát már a hatvanas-hetvenes években hálótervezés (pl. CPM, MPM, PERT), ütemezés (pl. Gantt-diagramok, LOB) és ezekhez tartozó költség-optimalizációs eljárásokkal (pl. CPM/COST, MPM/COST, PERT/COST) kezelni tudták. A legnagyobb problémát az erőforrások kezelése jelentette. A megvalósítás során az erőforrások kezelésétől nem tekinthetünk el, hiszen egy projekt esetén a rendelkezésre álló erőforrásaink szűkösek. Meghatározott létszámú munkaerővel, géppel stb. dolgozhatunk. [1, 4]

Ha azt szeretnénk, hogy a lehető legrövidebb idő alatt, a lehető legkisebb költséggel valósítsuk meg a projektet vagy a beruházást úgy, hogy a rendelkezésre álló erőforrásainkat (munkaerő, anyagok, gépek stb.) ne lépjük túl, és az erőforrásainkat a lehető legjobban használjuk fel, akkor könnyen (akár már 10 000 elvégzendő tevékenység esetén is) olyan nehéz problémához juthatunk, amelyet a mai számítástechnikai programok csak nagyon nehezen tudnak megoldani. [9]

A problémát tovább bonyolítja, hogy pl. egy beruházás megvalósítása során az elvégzendő tevékenységek megvalósítási idejét (lefutási idejét), (változó)költség-igényét, erőforrás szükségletét csak becsülni tudjuk.

A következő tanulmányban egy olyan módszert mutatunk be, mellyel tetszőleges projekt (költség-, erőforrásigény-, idő)optimális erőforrás-allokációját lehet meghatározni figyelembe véve az egyes paraméterek becslésének bizonytalanságát is. A bemutatott módszereket széles körben lehet majd alkalmazni a projektmenedzsmentben, erőforrás-tervezésben, logisztikában, egyedi termékek gyártásában.

### ERŐFORRÁS-ALLOKÁCIÓ:

#### MEGENGEDETT MEGOLDÁS, OPTIMÁLIS MEGOLDÁS KERESÉSE

A számítástechnika fejlődésével lehetőség nyílt olyan problémák megoldására is, amelyek megoldása korábban elképzelhetetlenek tűnt. Ilyen probléma volt az erőforrás-elosztás kérdése is. Projektmenedzsmentben, logisztikában kétfajta erőforrás-tervezéssel, erőforrás-allokációval foglalkozunk attól függően, hogy mit tekintünk „erősebb” korlátnak.

*Időkorlátos erőforrás-allokáció*nak nevezzük azt az erőforrás tervezést, amikor az erőforrásainkat úgy kell csoportosítani, hogy az adott projektet vagy beruházást egy adott időkorlát alatt végre lehessen hajtani. Itt tehát a korlátot elsődlegesen az időkeret adja, a cél pedig: minél kevesebb vagy minél egyenletesebb erőforrás-felhasználás.

---

<sup>291</sup> Veszprémi Egyetem Szervezési és Vezetési Tanszék PhD hallgató.

Ezzel szemben az **erőforrás-korlátos erőforrás-allokációnál** a korlátot a meglévő erőforrásaink szolgáztatják. Ezt az erőforrás-korlátot tehát nem léphetjük túl, a célunk pedig: a program végrehajtása a lehető legrövidebb idő alatt. [8]

Számos esetben a beruházó cégek megelégszenek egy ún. megengedett megoldás megtalálásával, vagyis egy olyan ütemtervvel, ahol a megvalósítás során a rendelkezésre álló erőforrásainkat vagy időkeretünket nem lépjük túl. Egy ilyen megengedett megoldás néhány tevékenység esetén kézzel, több tevékenység esetén számítástechnikai szoftverekkel (pl. Microsoft Project, CA-SuperProject, Primavera stb.) viszonylag könnyen megtalálható. Egy ilyen ún. megengedett erőforrás-allokáció esetén azonban sokszor számos probléma merülhet fel.

Számos esetben fontos lehet, hogy az erőforrásainkat viszonylag egyenletesen használjuk fel, vagy a tevékenységeket a lehető legkorábban végrehajtsuk stb. Ezeket a kívánalmakat célként (célfüggvényként) fogalmazhatjuk meg. Egy **erőforrás-allokációs probléma (adott célfüggvényre nézve) optimális megoldása** egy olyan megengedett ütemterv lenne, amely az adott célt legjobban kielégíti (vagy más-képpen a célfüggvény értéke ebben az esetben minimális/maximális).

Általában is elmondható, hogy egy probléma megoldására használt módszereket három csoportba osztják.

- Heurisztikus módszerek
- Evolúciós módszerek
- Algoritmikus módszerek

A **heurisztikus módszerekre** jellemző, hogy hamar adnak gyors megoldást, melyek viszonylag jól használhatók, de legtöbbször nem garantálják az optimális megoldás megtalálását. Az ilyen algoritmusok valamilyen jól bevált tapasztalati módszereket követnek. Az **algoritmikus módszerek** ezzel szemben garantálják az optimális megoldást, ennek ára viszont az, hogy általában jóval lassabbak a heurisztikus módszereknél. Az **evolúciós módszerek** a kettő közti átmenetet képviselik. Egy heurisztikus módszer által megadott megengedett megoldásból indulnak, amelyet fokozatosan javítanak. Hátrányuk ugyanaz, mint a heurisztikus megoldásoknak, vagyis nem garantált az optimális megoldás megtalálása véges lépésben.

Erőforrás-tervezésre leggyakrabban a mai napig heurisztikus eljárásokat használnak. Ennek az az oka, hogy bizonyos (10 000) tevékenységszám és néhány (5-10) erőforrástípus esetén a probléma kezelhetlenné válik. A mai számítástechnikai teljesítmény ellenére is gyakran az optimális megoldás megtalálása reménytelen feladat. Az optimumkereső algoritmusok másik nagy hiányossága, hogy a közbelső megoldásai általában nem megengedettek. Ha tehát a feladat annyira bonyolult, hogy valószínűsíthető, hogy az adott erőforrás-tervezési problémát nem tudjuk meghatározott időn belül megoldani, akkor nem tudjuk megállítani a keresést, és az eddigi legjobb megoldást elfogadni, mert az sem garantált, hogy ez a megoldás egyáltalán megvalósítható (megengedett erőforrás-allokáció) lesz. [10]

Az erőforrás-tervezés során használt evolúciós eljárások kiinduló megoldásai ugyan lehetnek megengedettek, de itt sem garantált, hogy a közbelső lépések megengedettek lesznek.

Munkám során erőforrás-korlátos erőforrás-allokációval foglalkoztam. Az általam kidolgozott módszer egy megengedett erőforrás-allokációból indul. Minden lépésben javítva azt egy adott célfüggvénynek megfelelően (pl. egyenletes erőforrás-kihasználás, lehető legkorábbi kezdés stb.), amíg el nem jutunk egy optimális megoldáshoz úgy, hogy a közbelső lépések is megengedettek legyenek.

Amennyiben a projekt működése közben az erőforráskorlát, vagy a tevékenységek erőforrásigénye, lefutási ideje megváltozik, a javasolt módszer segítségével meghatározható egy új termelési program a még futó, illetve a még el nem kezdett tevékenységekre. Az eljárás segítségével olyan projektekre is meghatározható várható átfutási idő, költség- illetve erőforrásigény, ahol a tevékenységek lefutási idejét, költség-, illetve erőforrásigényét csak becsülni tudjuk.

Ezzel a módszerrel több párhuzamosan működő projektet optimalizálhatunk, illetve többféle erőforrás egyidejű kezelését valósíthatjuk meg. Kezelni tudjuk továbbá a fel nem használt erőforrásokat is.

## ERŐFORRÁS-ALLOKÁCIÓ, MEGENGEDETT MEGOLDÁSBÓL OPTIMÁLIS MEGOLDÁS KERESÉSE

Az általam kifejlesztett módszer tehát az erőforrás-allokációs probléma megengedett megoldásából indul ki. Megengedett megoldást szolgáltat, pl. a Magyarországon kifejlesztett ERALL-módszer, a soros vagy párhuzamos allokáció. Szoftveres úton is kereshetünk megengedett megoldást pl. a Microsoft Project programja segítségével. A módszer egy adott célfüggvényre keres optimális megoldást, melyet előre rögzítenünk kell (pl. lehető legkorábbi kezdés, kiegyenlített erőforrás-felhasználás stb.). [8]

A módszer ismertetéséhez előbb néhány – az ütemezésben használt – alapfogalmat kell áttekintenünk.

Bizonyos tevékenységeket párhuzamosan, bizonyos tevékenységeket pedig csak egymás után végezhetünk (pl. egy ház alapjának kiásása meg kell hogy előzze az alap betonnal való kiöntését). Amikor előírjuk, hogy egy tevékenységet milyen más tevékenység követhet, akkor tulajdonképpen egy **rákövetkezési relációt** határozunk meg. Ha meghatároztuk a megvalósításhoz szükséges tevékenységeket, megállapítottuk a rákövetkezési relációkat, akkor felrajzolhatunk egy ún. **logikai hálót**. Ez a háló megmutatja a tevékenységek közti logikai kapcsolatokat (rákövetkezési relációkat).

Ezután meg kell határozni, vagy meg kell becsülnünk a tevékenységek (várható) **lefutási idejét**. Ezután egy ütemezési módszerrel (pl. CPM, PERT, MPM stb.) meghatározhatjuk a **teljes projekt átfutási idejét**. A módszerek segítségével kiszámíthatjuk, hogy egy adott tevékenységnek mikor kell kezdődnie, illetve befejeződni legkorábban, illetve legkésőbb. Azokat a tevékenységeket, melyek nem csúszhatnak (az ún. **teljes tartalékidejük**, ami nem más, mint a **legkésőbbi kezdés** – a **legkorábbi kezdés** = 0), **kritikus tevékenységeknek** nevezzük. A program kezdésétől a befejezéséig tartó kritikus tevékenységekből rákövetkezési relációban álló tevékenységek sorát **kritikus útnak** nevezzük. Ez az út lesz a felrajzolt hálóban a leghosszabb út. [1]

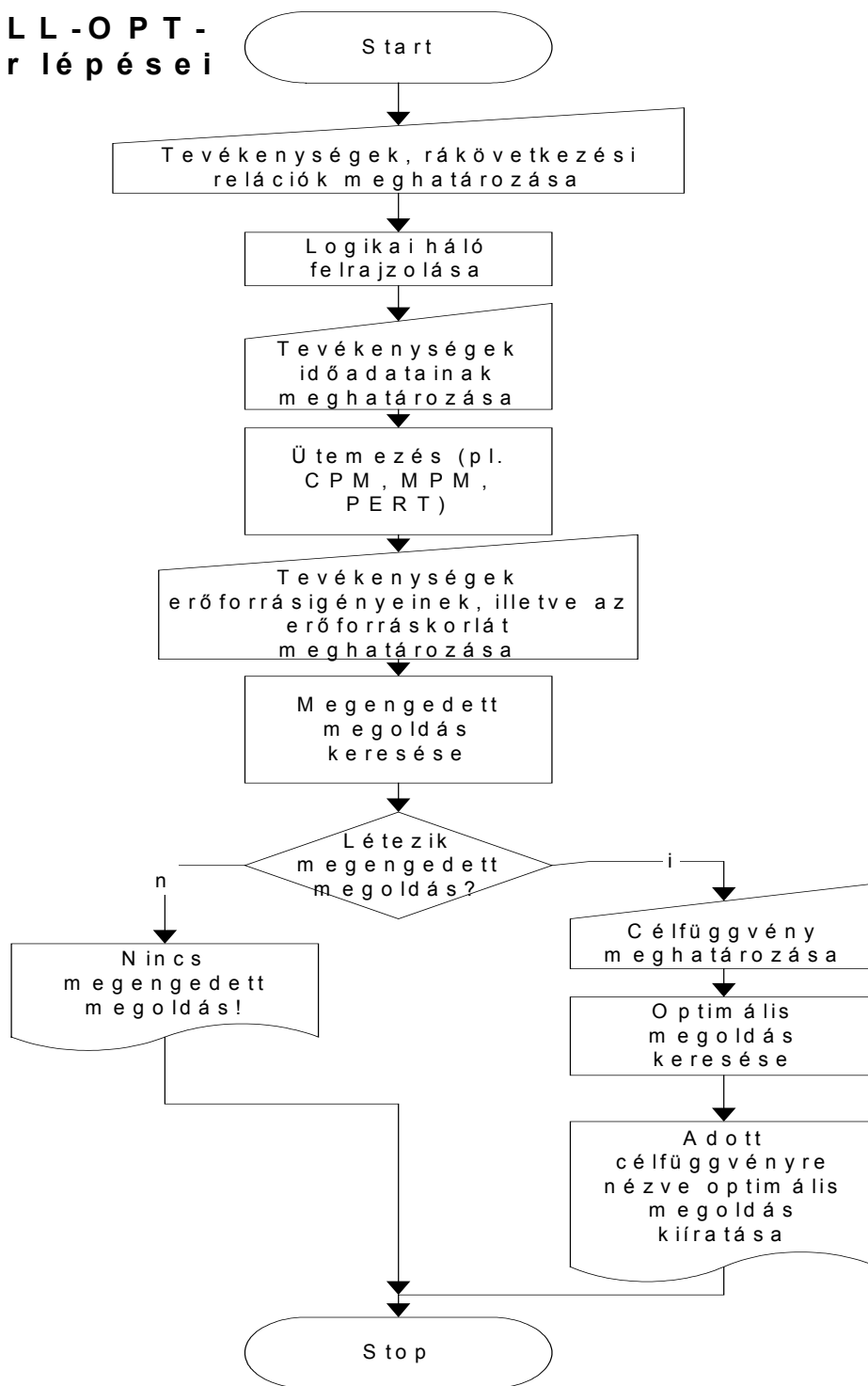
Az ütemezési feladat megoldása után meg kell határozni, vagy meg kell becsülni a tevékenységek végrehajtásához szükséges erőforrásokat, illetve ezek mennyiségét. (pl. egy adott munka végrehajtásához hány fő szükséges, milyen anyagokat kell felhasználnunk, illetve milyen berendezésekre van szükségünk.) Ha adott(ak) az erőforrás-korlát(ok), akkor keresnünk kell egy megengedett megoldást. Ebben az esetben egy olyan ütemtervet kapunk, amely során a teljes projekt átfutási ideje lehetőleg nem növekszik és a rendelkezésre álló erőforráskorlátot a program megvalósítása során egyszer sem lépjük túl.

Ezután meg kell határozni, hogy milyen erőforrás-felhasználást szeretnénk megvalósítani, vagyis meg kell határozni a célfüggvényt.

Ha található megengedett megoldás, akkor található véges lépésben az adott célfüggvényre nézve legjobb megoldás, amit a továbbiakban **az erőforrás-allokációs probléma adott célfüggvényre nézve optimális megoldásának** nevezzük.

A módszer leegyszerűsített folyamatábráját láthatjuk az alábbi ábrán.

## Az ERALL-OPT- módszer lépései



### Optimális erőforrás-allokáció meghatározása ERALL-OPT segítségével

#### ERŐFORRÁS-ALLOKÁCIÓ IDŐBEN VÁLTOZÓ KORLÁTOZÁS ESETÉN

A gyakorlati életben sokszor a rendelkezésünkre álló erőforrások időben nem állandóak. (Pl. ünnepnapokon lehet, hogy csak kevesebb munkásra számíthatunk.)

Abban az esetben, amikor az erőforráskorlát időben változik (pl. egy szakaszonként konstans függvény, és az erőforráskorlát függvényének csak véges sok helyen van szakadása), vissza lehet vezetni a feladatot az előző pontban tárgyalt (konstans erőforráskorláttal rendelkező) erőforrás-allokációs problémára.

Első lépésként megkeressük az erőforráskorlát maximumát. Azokon a szakaszokon, ahol az erőforráskorlát-függvény értéke kisebb ennél, ott vezetünk be olyan **látszat-erőforrásigényt**, amelyeket semmiképpen sem mozgathatunk el a megengedett megoldás-keresésben. Rendezzük ezeket a látszat-erőforrásigényeket az erőforrás-terhelési diagram alá.

Ha létezik megengedett megoldás, akkor az algoritmusunk megtalálja az adott célfüggvényre nézve optimális megoldást, hiszen a látszat-erőforrásigényeket nem mozgattuk el a megengedett megoldás keresése során, így ezeket nem is optimalizáljuk. A továbbiakban az algoritmus során a látszat-erőforrásigényeket tevékenységként kezeljük.

## **TOVÁBBI ALKALMAZÁSOK (ON-LINE ÜTEMEZÉS, MEGSZAKÍTHATÓ TEVÉKENYSÉGEK)**

A megvalósítás során sokszor előfordul, hogy a már működő projektbe menet közben kell beavatkoznunk. Ennek több oka is lehet. Előfordulhat, hogy a projekt végrehajtása közben bizonyos nehézségek lépnek fel. Például egy adott tevékenység a tervezettnél több erőforrást igényel, vagy éppen lefutási ideje tovább tart, mint arra számítottunk. Az is lehetséges, hogy az erőforráskorlát másképpen alakul, mint azt eredetileg elterveztük.

Tegyük fel, hogy egy meghatározott  $v(t)$  időpontig a tevékenységek egy adott módon már végbementek. (Legyen pl.  $v(t)$  a mai dátum, amikor tudomásunkra jut a változás). A  $v(t)$  időpont előtt befejezett tevékenységekkel nem kell foglalkoznunk, hiszen az már végrehajtott. A végrehajtás alatt lévő tevékenységeket viszont (mivel a modellünk szerint ezek nem megszakítható tevékenységek) nem szabad elmozgatnunk. (Megszakítható tevékenységek kezelését később tárgyaljuk). Így az előző algoritmus módjára úgy kezeljük őket, mintha látszat-erőforrásigények lennének, így biztosítva azt, hogy ne szakadhassanak meg.

## **TEVÉKENYSÉGEK MEGSZAKÍTHATÓSÁGA**

A gyakorlatban vannak olyan tevékenységek, melyeket megszakíthatunk, és vannak olyan tevékenységek, amelyeket nem. A megszakítható tevékenységekre is igaz, hogy egy bizonyos ideig (pl. a technológia miatt) nem szakíthatók meg, és értelmezhető egy olyan idő, amely elteltével az adott tevékenységet mindenképpen folytatni kell. Ha egy tevékenység esetében megengedjük a megszakíthatóságot, akkor a soros illetve párhuzamos allokációk bármelyike [9] használható megengedett megoldás keresésére.

Ha ebből a megengedett megoldásból indulunk ki úgy, hogy a megszakított tevékenységeket külön tevékenységekként kezeljük azzal a megszorítással, hogy a maximális idő, amely e két megszakított tevékenység között van, ne lépje túl az előírtat, akkor egy optimális megoldást kaphatunk. Vagyis be kell vezetnünk egy  $t_{f(i,j)}$  időt, mely megmondja, hogy két megszakított résztevékenység mennyi idő után követi egymást. Ez egy optimalizálási lépésben nem lépheti túl az előírt értéket.

## **KÖLTSÉG-, IDŐ-, ERŐFORRÁS-OPTIMÁLÁS EGYIDEJŰ MEGVALÓSÍTÁSA**

A következőkben olyan feladatokkal foglalkozunk, ahol a három kritérium, a költség-, idő- és erőforrás-optimalitás egyaránt fontos szempont. Az eddig tárgyaltakat figyelembe véve a gyakorlati élethez ez a modell áll a legközelebb. Képzeljünk el egy projektet, melynél a tevékenységeket, a tevékenységekhez szükséges időt, költséget, erőforrásigényt már meghatároztuk. Adott minden tevékenységre vonatkozóan, hogy ha az adott tevékenységet hamarabb szeretnénk befejezni, akkor az milyen költség- és erőforrás-növekménnyel jár. Ebben a helyzetben kell egy olyan programot meghatározni, mely a minimális költségnövekménnyel, a legrövidebb idő alatt, maximális párhuzamosítás mellett beütemezi a tevékenységeket a legkorábbi időpontra úgy, hogy egy adott erőforrás-korlátot ne lépjen túl.

Ez a három kritérium nem mindig elégíthető ki egyszerre kompromisszumok nélkül.

Az alábbiakban definiáljuk néhány fogalmat, melyet a költségtervezés kapcsán a CPM/COST, MPM/COST módszernél (is) alkalmaznak.

- **Normál lefutási idő:** Az az időmennyiség, amely a tevékenység normál/tervszerű végrehajtásához szükséges.
- **Minimális lefutási (vagy roham)idő:** Az a legkisebb időmennyiség, amely alatt a tevékenységet végre lehet hajtani.

Elmondható, hogy a (változó) költségek és a lefutási idők között általában fordított arányosság figyelhető meg.

A rohamidőnél ( $t_r$ ) rövidebb idő alatt nincs értelme a költséget, és az erőforrásigényt vizsgálni, hiszen ennél kevesebb idő alatt a tevékenységet nem lehet végrehajtani, így ezek a görbék ilyen időkre nincsenek is értelmezve. A tevékenység erőforrásigénye (attól függ, hogy mit tekintünk erőforrásigénynek) fordítottan arányos a lefutási idővel (például, ha az erőforrásigény a munkaerő, akkor több idő alatt kevesebb, míg kevesebb idő alatt több munkás tudja elvégezni ugyanazt a munkát). A javasolt módszer szempontjából teljesen mindegy, hogy az idő és az erőforrásigény között milyen függvénykapcsolat van. Egy fontos követelmény van csupán, mégpedig az, hogy bármely (diszkrét) időpontban, (de legalább a normál lefutási idő ( $t_n$ ) és a rohamidő ( $t_r$ ) közötti időintervallumban) meg tudjuk mondani az adott időhöz tartozó erőforrásigényt.

A költségek tekintetében azonban szorosabb ez a kritérium. A (változó) költségek általában a normál lefutási idő ( $t_n$ ) és a rohamidő ( $t_r$ ) időintervallum között fordítottan arányosak a tevékenység lefutási idejével.

A továbbiakban a fenti feltételeknek megfelelő erőforrásigény és (változó)költség-függvényekkel foglalkozunk. Először a legkorábbi (normál)időre vonatkozó ütemezést végezzük el. Ez a módszer megadja a tevékenységek maximális párhuzamosítása melletti legkorábbi kezdési időpontokat. Ezután elvégezzük egy változó költség – lefutási idő elemzést (ilyen pl. a CPM/COST-, MPM/COST-módszer). A lépéseket egy táblázatban összefoglaljuk.

Ha az összes (változó) költségre megszabnánk egy korlátot, akkor ez a módszer az ennek megfelelő legjobb megoldást szolgáltatná. Ekkor a módszer lépéseit csak addig kell végrehajtani, ameddig a változó költségek összege kisebb vagy egyenlő, mint ez a korlát. A módszer csak a kritikus úton lévő tevékenységeket csökkenti úgy, hogy figyel arra, hogy egy nemkritikus út a kritikus úton lévő tevékenységek lefutási idejének csökkentésével, már kritikus úttá válhat. Valamint egy lépésben nem lehet többet csökkenteni a lefutási időn, mint a nemkritikus úton lévő tevékenységek tartalékideje.

Ha a CPM/COST-, MPM/COST-módszerrel meghatároztuk a lépéseket, akkor meghatározzuk a terhelési diagramot. Ha van olyan időpont, ahol az összes erőforrásigény nagyobb, mint az erőforráskorlát, akkor keresünk egy megengedett megoldást. Ha találtunk olyan termelési programot, amelyben a kritikus utat nem kellett megváltoztatni (legyen ez a továbbiakban **nemkritikus megoldás**), akkor az általunk kifejlesztett erőforrás-optimaló algoritmust futtatjuk le. Ekkor a feladat költségnövekmény-, idő- és erőforrás-optimalis lesz egyben.

Ha nem található olyan megengedett megoldás, melyre a kritikus út nem változik, akkor a CPM/COST-, MPM/COST-módszer által szolgáltatott lépések közül az utolsó előtti végezzük el a fenti vizsgálatokat. Ha egy lépésben több időegységnyt javítottunk a projekt átfutási idején, akkor ezekre a közbenső állapotokra is el kell végezni a fenti vizsgálatokat, mivel elképzelhető, hogy ebben az esetben találunk egy nemkritikus megoldást. Ha a CPM/COST, MPM/COST módszer egyetlen lépése sem szolgáltat nemkritikus megoldást (valamint a közbenső lépéseknél sem található ilyen megoldás), akkor azt mondjuk, hogy a teljes projekt időtartamát az adott erőforráskorlát mellett nem lehet lerövidíteni. Ekkor visszaérkeztünk a harmadik fejezetben tárgyalt esethez, vagyis először egy megengedett megoldást kell keresni, majd ezt az adott célfüggvényre nézve minden lépésben javítva lehet meghatározni az optimalis megoldást.

Amennyiben olyan erőforrás-allokációt kell meghatároznunk, ahol az összes költség minimális, akkor a következőképpen kell eljárni. Először meg kell határozni a normál, illetve a minimális átfutási idővel

rendelkező termelési programot. Ezután a minimális összköltséggel rendelkező termelési programra végezzük el a megengedett megoldás keresését. Ha létezik nemkritikus megengedett megoldás, akkor létezik a feltételeknek megfelelő összköltség-minimális optimális erőforrás-allokáció is. Ha nem található nemkritikus megoldás, akkor az összköltség-minimális termelési programhoz legközelebb eső legkisebb átfutási idővel rendelkező termelési programra végezzük el az optimalizálást. Ha a normál, illetve a minimális átfutási idővel rendelkező termelési programok között egyetlen nemkritikus megoldás sem található, akkor az előző módszerhez hasonlóan járunk el.

## **KÖLTSÉGCSÖKKENTÉS ALTERNATÍV MEGOLDÁSOK SEGÍTSÉGÉVEL**

A projektek tervezése és megvalósítása során nagyon sokszor előfordul, hogy az előzetes kalkuláció után a minimális összköltséggel megvalósítandó optimális erőforrás-allokációjú projektet sem lehet azon az áron megvalósítani, amelyen a tendert kiíró megvalósítani szeretné.

Ha az előzetes kalkulációk során kiszámított minimális összköltségre vonatkozó optimális erőforrás-allokációs megoldás esetén a költségek magasabbak, mint a program megvalósítására szánt költségvetés, akkor három lehetőségünk van: vagy lemondunk a projekt megvalósításáról, vagy veszteséggel, de megvalósítjuk a projektet, vagy pedig az egyes megvalósítandó tevékenységeket – költségcsökkentés céljából – más tevékenységekkel váltjuk ki. Az első választási lehetőséggel az elemzés során most a továbbiakban nem foglalkozunk, hiszen ebben az esetben elesünk az üzlettől és itt nincs értelme tovább optimális erőforrás-tervezést készíteni. A második választási lehetőséget néha akkor is „bevallalják”, ha az átmeneti veszteség ellenére arra számítanak, hogy későbbi projektek megvalósításakor ez a veszteség megtérül. Ekkor meg kell határozni egy minimális összköltséggel járó, adott célfüggvényre optimális erőforrás-allokációt. (A módszer menetét lásd az előző fejezetben). A továbbiakban mi a harmadik esettel foglalkozunk, vagyis egyes megvalósítandó tevékenységeket – költségcsökkentés céljából – más tevékenységekkel váltjuk ki.

A harmadik esetben először egy listát kell készítenünk az egyes tevékenységek alternatív megvalósításairól.

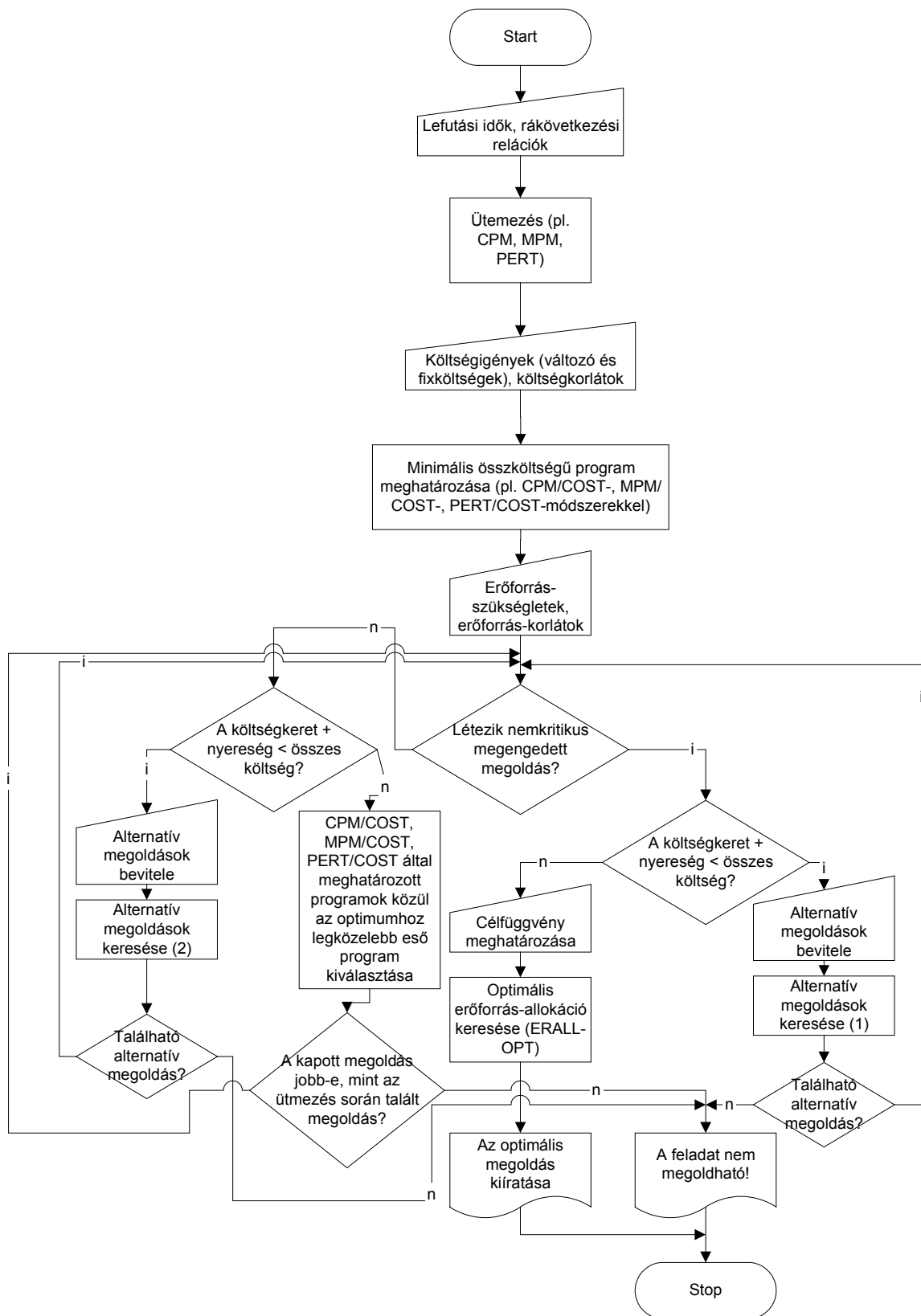
Itt a célunk megfogalmazásakor három szempontot kell figyelembe venni (itt a pontok a választás során prioritásokat is jelölnek):

- a lehető legjobb minőségben végezzük el az adott tevékenységeket,
- lehető legtöbb költségcsökkenéssel járjon az alternatív megoldás bevezetése,
- lehető legkisebb mértékben változzon (és ha lehet, inkább csökkenjen) a tevékenység lefutási ideje, erőforrásigénye.

Ezen kritériumok mellett minden tevékenység esetén meghatározható egy minimális minőségi követelmény, melyet mindenképpen a szerződés értelmében teljesítenünk kell.

Célszerű az adott tevékenységhez tartozó alternatív megoldásokat ezen szempontok szerint rendezni. Azokat a tevékenységeket, melyek a minőségi követelményeknek nem felelnek meg, ki kell zárni a lehetséges megvalósítandó alternatív tevékenységek listájából. A kiválasztás során a célnak leginkább megfelelő alternatív megoldással újraütemezzük a tevékenységeket, illetve újból megkeressük az optimális megoldást. Az alternatív megoldások keresése egy több célfüggvényre meghatározott kiválasztási probléma.

A módszer menetét az alábbi folyamatábra szemlélteti.



### Alternatív megoldások keresése

## TÖBBFÉLE ERŐFORRÁS EGYIDEJŰ KEZELÉSE

Nagyobb projektek esetén nemcsak egy erőforrást kell figyelembe vennünk, hanem általában többet (munkaerő, anyagfelhasználás, berendezések stb.). Ezeket együttesen kell kezelni. Meghatározható valamennyi erőforrás-felhasználásra egy-egy korlát. Ekkor fel kell rajzolnunk valamennyi erőforrás-fajtára egy-egy terhelési diagramot. Ezeket csak együttesen optimalizálhatjuk, hiszen az itt megkapott



ütemterveknek meg kell egyezniük. A tevékenységeket mindegyik diagramról leolvasva ugyanakkor kell kezdeni, illetve befejezni, megszakítani, illetve tovább folytatni.

## **PÁRHUZAMOS PROJEKTEK KÖZÖTTI ERŐFORRÁS-ELOSZTÁS**

Egy vállalatnál párhuzamosan több beruházási projekt, termelési program is folyhat. Amennyiben azonos erőforrásokat igényelnek, akkor elképzelhető, hogy érdemes bizonyos erőforrásokat átcsoportosítani az egyik projektből a másikba a hatékonyabb erőforrás-kihasználás érdekében. Erőforrásokat a két projekt között csak akkor lehet átcsoportosítani, ha: Azonos erőforrásokat használnak, az erőforrás-átcsoportosítás lehetséges (nincs térbeli, földrajzi, technológiai, egyéb akadály) és az erőforrás-átcsoportosítást a vállalat engedélyezi.

Amennyiben a fenti feltételek teljesülnek, akkor a hálók és a terhelési diagramok összevonhatók egy hálóba, illetve egy diagramba. Az összevont hálón, illetve diagramon sem kaphatunk a felhasznált tartalékidőkre jobb megoldást, mint a legkorábbi időre beütemezett, maximálisan párhuzamosított megoldás, hiszen a rákövetkezési relációkat itt is be kell tartani. Mégis általában jobb, hatékonyabb megoldást kapunk, mintha két független, párhuzamosan működő projektet külön-külön optimálnánk.

Amennyiben a fenti feltételek bármelyike nem teljesül, akkor csak külön-külön optimalizálhatjuk a projekteket.

A fennmaradó erőforrást többféleképpen is eloszthatjuk. Amennyiben például az erőforrás a munkaerő, úgy csak annyi munkást kell foglalkoztatni az adott időben a projekten, amennyit a projekt erőforrásigénye megkíván. Ha az erőforrás nem a munkaerő, hanem pl. valamilyen anyag, berendezés, akkor a ki nem használt erőforrást az alábbiak figyelembevételével oszthatjuk el:

- Ha a legfontosabb szempont, hogy a termelési program akkor se változzon, ha valamilyen többlet erőforrásigény lép fel, akkor célszerű a fennmaradó erőforrásokat vagy egyenlően, vagy valamilyen súlytényező figyelembevételével ahhoz a termelési programhoz rendelni, ahol az erőforrásokra inkább szükség lehet.
- Az előző esetben előfordulhat, hogy sokszor kell egyik projektből a másikba szállítani olyan anyagokat, amelyeket lehet, hogy fel sem használunk. Ha az a szempont, hogy a projektek közötti anyagszállítás minimális legyen, akkor a következőképpen járunk el. Kihhasználjuk, hogy a projektekhez szükséges összes erőforrás elegendő az összes projekt számára, így azt kell meghatározni, hogy hogyan lehet kielégíteni az összes erőforrásigényt minimális anyagmozgással.

## **BIZONYTALANSÁG KEZELÉSE ERŐFORRÁS-, KÖLTSÉG- ÉS IDŐTERVEZÉSBN**

A gyakorlati életben számos esetben nem tudjuk biztosan meghatározni egy adott projekt vagy termelési program tevékenységeinek lefutási idejét. Különösen igaz ez kutatási és fejlesztési programokra, ahol a tevékenységek időtartamai kevéssé ismertek. A tervezett és a tényleges időtartam sokszor különbözik egymástól. [1]

A szakirodalom szerint általában 10-12% költséget takaríthatunk meg azáltal, hogy a tevékenységek lefutási idejét nem determinisztikus változóként, hanem egy valószínűségi változóként kezeljük, hiszen így az időtartamok bizonytalanságát már előre figyelembe tudjuk venni. Hozzávetőlegesen meg tudjuk határozni, hogy egy adott biztonsági szint mellett mennyi lesz a program átfutási ideje. Mégis nagyon sokszor nem várt események is befolyásolhatják a projekt vagy a termelési program átfutását. Amennyiben a projekt működése közben az erőforráskorlát vagy a tevékenységek erőforrásigénye, lefutási ideje megváltozik, a módszer segítségével meghatározható egy új termelési program a még futó, illetve a még el nem kezdett tevékenységekre.

### **Sztochasztikus idő-, költség- és erőforrás-tervezés**

Ebben a fejezetben a tervezés során fellépő bizonytalanságokra egy egységesen kezelhető modellt mutatunk be. Megmutatjuk, hogy a méréstechnikában használt bizonytalanságra vonatkozó fogalmak

itt is használhatók. Számos esetben az ott bevezetett általános fogalmak egy-egy speciális eseteit használjuk időtervezésre, illetve költségtervezésre.

### **Sztochasztikus időtervezés**

A sztochasztikus időtervezés során az egyes tevékenységek lefutását egy-egy valószínűségi változóként kezeljük. Két eset lehetséges:

- A szóban forgó tevékenységek nem teljesen ismeretlenek és mindegyikükre közelítőleg ismerjük időtartamuk valószínűség-eloszlását, vagy:
- Teljesen ismeretlenek (vagy legalábbis nagyon kevésbé ismertek), és nem ismerjük minden időtartam valószínűség-eloszlását.

Ha ismerjük az időtartamok eloszlását, akkor minden nehézség nélkül meghatározhatjuk az egyes tevékenységek átlagos időtartamát (az időtartam várható értékét) és szórásnégyzetét (varianciáját), valamint a szórását (standard bizonytalanságát). [5]

Egy tevékenység várható lefutási idejét, varianciáját a következőképpen jelöljük:

$$E(t_{i,j}) = \bar{t}_{i,j}, D^2(t_{i,j}) = \sigma_{i,j}^2 = u^2(t_{i,j}) \quad (1)$$

Ha nem ismerjük az időtartamok eloszlását, akkor a projekt tervezésekor a számítások megkönnyítése érdekében a – hálótervezésben használt – PERT-módszert használjuk és feltesszük, hogy az időtartamok  $\beta$ -eloszlásúak.

Egyedi- és kissorozatgyártás termelésirányításában egy-egy termék elkészítésének menete szintén felfogható úgy, mint egy projekt megvalósítása. Itt azonban a tevékenységek időtartamának eloszlásáról sokszor semmilyen információnk nincs, és gyakran nem is feltételezhetjük, hogy az adott tevékenység időtartama  $\beta$ -eloszlást követ, így a várható értékeket, illetve az időtartam várható értékének szórását (standard bizonytalanságát) is nehéz meghatározni. Itt segítségünkre az lehet, hogy az adott terméket minden bizonnyal többször is legyártjuk. Ha az egyes gyártásoknál az egyes tevékenységek időtartamait feljegyezzük, akkor ebből a várható érték a következőképpen becsülhető:  $N$  gyártás, illetve  $M$  tevékenység esetén az egyes tevékenységek várható értéke:

$$E(X_i) = \bar{X}_i = x_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_{i,j}. \quad (2)$$

A standard bizonytalanság négyzete:

$$u^2(x_i) = s^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i) = \frac{s^2(X_i)}{N}. \quad (3)$$

Megjegyzés: Hasonló becsléseket lehetne adni az egyes tevékenységek változó költség-, illetve erőforrásigény vonzatára is.

Ha a három módszer valamelyikével (ismert eloszlás esetén közvetlenül, ismeretlen eloszlásnál  $\beta$ -eloszlást feltételezve, illetve több gyártás során szerzett tapasztalat útján) meghatároztuk a várható értéket, illetve az időtartamok várható értékeinek szórásnégyzetét (standard bizonytalanságának négyzetét), akkor kiszámítható a projekt átfutási idejének szórása (összetett standard bizonytalansága) az alábbi megfontolásokat felhasználva: [11]

A központi határeloszlás tételét felhasználva: a projekt, illetve a termelési program átfutási idejének várható értéke az időtartamok lefutásainak várható értékeinek összege:

$$E(y) = \sum_{i=1}^M E(X_i). \quad (4)$$

Megjegyzés: M tevékenységet feltételezve a kritikus úton. A projekt, illetve termelési program átfutási idejének szórásnégyzete (az összetett standard bizonytalanság) általános esetben a következőképpen számítható:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j), \quad (5)$$

ahol  $u_c$  az ún. összetett standard bizonytalanság,  $u(x_i, x_j)$   $x_i, x_j$  tevékenységek közötti kovariancia,  $y = \bar{Y} = f(x_1, x_2, \dots, x_M)$  pedig a modellfüggvényünk. A projektek, illetve a termelés során legtöbbször feltehetjük, hogy  $y = \bar{Y} = f(x_1, x_2, \dots, x_M) = x_1 + x_2 + \dots + x_M = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_M$ . (Ezt a feltételezést tettük tulajdonképpen az első pontban is. Vannak olyan modellek, melyek az időt, illetve a költséget is egységes függvényként kezelik. Ebben az esetben az összetett standard bizonytalanság kiszámításánál más lesz a modellfüggvényünk.) Ha a fenti feltételezést elfogadjuk, akkor a deriváltak 1-ek, és a képlet a következőképpen egyszerűsödik:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^M u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j), \quad (6)$$

ahol az  $r(x_i, x_j)$   $x_i, x_j$  tevékenységek közötti korreláció. Ha a tevékenységek lefutásának időtartama egymás lefutásaitól (lineárisan) független (vagyis a korreláció nulla valamennyi esetben), akkor a projekt várható átfutásának szórásnégyzete (az összetett standard bizonytalanság négyzete) a következőképpen alakul:

$$\sigma^2 = u_c^2(y) = \sum_{i=1}^M u^2(x_i). \quad (7)$$

Több kritikus út esetén a projekt vagy termelési program átfutási idejének szórásai közül általában a maximálist választjuk (elővigyázatosságból).

### Sztochasztikus költségtervezés

A projekt vagy a termelési program során előfordul, hogy a változó költség növekedése árán kell átfutási időt csökkentenünk. Először bemutatunk néhány gyakorlatban használt eljárást, melyek nem veszik figyelembe a költségek esetleges bizonytalanságát, majd bemutatunk néhány lehetséges módszert a költségek bizonytalanságainak meghatározására.

#### Determinisztikus költségtervezés sztochasztikus időtervezés esetén

A tevékenységek lefutási idejének becslésénél (az egyszerűség kedvéért) feltételezzük, hogy az időtartamok  $\beta$ -eloszlást követnek.

A gyakorlatban legtöbbször erre a problémára a PERT/COST-módszert alkalmazzák, mely alkalmas mind minimális összköltség-, mind pedig minimális átfutási idejű program meghatározására.

A sztochasztikus időtervezés során azonban felléphetnek a tervezésből adódó problémák. Nézzünk ezek közül néhányat, illetve vizsgáljuk meg, hogyan lehet ezeket a problémákat kiküszöbölni. [3, 4]

Elsőként megemlíthetjük, hogy a normál megvalósítású program összköltsége általában nincs rajta az (össz)költség-optimalis görbén. Ez a következők miatt van így:

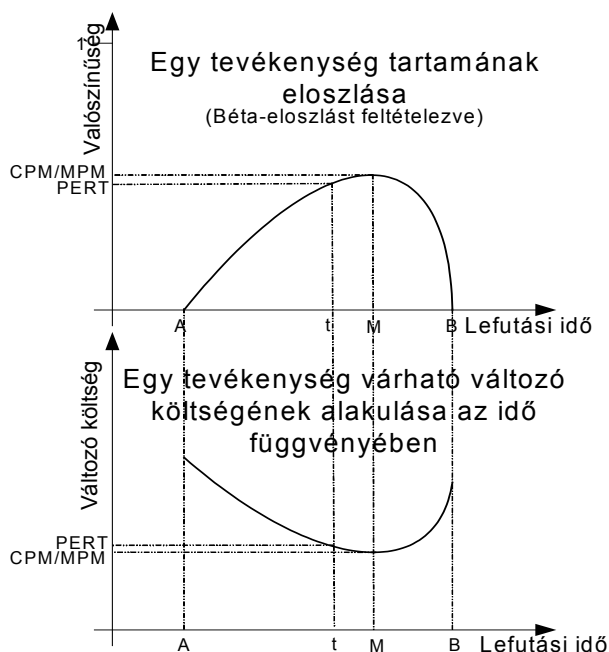
A determinisztikus időtervezés esetén egy tevékenység normál lefutási idejének azt az időt választjuk, ahol a megvalósításához szükséges (változó) költség a legkisebb. Ha minden tevékenységnél így járunk el, akkor egy olyan (ún. normál átfutási idejű) programot kapunk, ahol a tevékenységek megvalósításához tartozó összes változó költség minimális.

A PERT-módszernél legtöbb esetben három adatból (legvalószínűbb lefutás, optimista és pesszimista becslés) becsüljük meg a tevékenység várható lefutási idejét. Ez viszont egyáltalán nem biztos, hogy minimális változó költséggel jár.

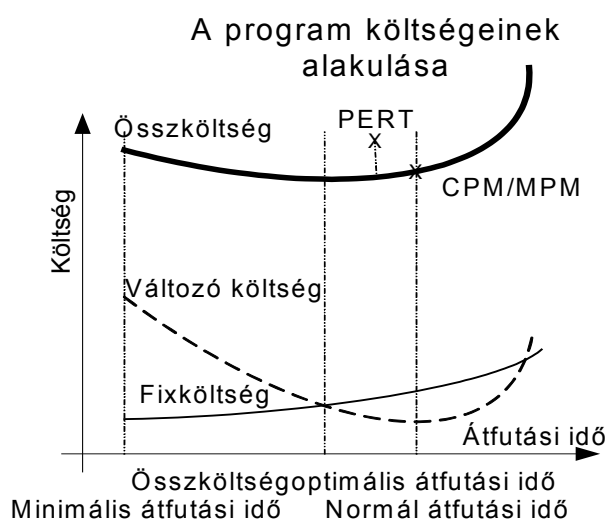
Ha a PERT- és CPM-, vagy MPM-módszer tevékenységidőtartam-becslését összevetjük, akkor láthatjuk, hogy a CPM-, MPM-módszernél gyakran úgy becsülünk, hogy a tevékenység normál lefutásának a legvalószínűbb lefutást választjuk. [9, 10]

A legtöbb esetben a PERT-módszer által meghatározott eloszlás nem szimmetrikus.

Ha feltesszük az 1-es pontban leírtakat, akkor az ábrákból könnyen látható, hogy a PERT-módszernél alkalmazott becslések miatt a program összköltsége (általában) nem lesz rajta az összköltség-optimalis görbén (ha például a PERT módszer által kiszámolt várható lefutási idők nem egyeznek meg a CPM-, MPM-módszerek által meghatározott normál lefutási idővel).



**Tevékenységek változó költségei és a várható lefutások kapcsolata determinisztikus költségtervezés esetén**



**A programok összköltségeinek alakulása**

Abban az esetben sem illeszkedik a PERT módszer által becsült lefutási időkből számolt projekt átfutási idejének költségvonzata az összköltség-optimális görbére, ha az egyes tevékenységekre a CPM-/MPM-módszer által becsült legvalószínűbb normál lefutási idő kisebb, mint a PERT-módszer által meghatározott várható (normál) lefutási idő.

Ha feltételezzük az egyes, illetve a kettes pontban leírtakat az egyes tevékenységekre, akkor egy – a gyakorlatban használt – módszer segítségével csökkenthetjük a program (össz)költségét, anélkül hogy a program várható átfutási idejét megnövelnénk. Ennek a módszernek a lényege, hogy az alternatív úton lévő tevékenységek szabad tartalékidejét csökkentjük (vagyis a tevékenységek várható időtartamát növeljük). Ez (feltételezve az 1., 2. pontokban leírtakat) (össz)költségcsökkenéssel jár. (Ekkor kiszámítható a szórás (standard bizonytalanság), és a módusz változása a 9-13 egyenletek szerint.) Ezzel a módszerrel a kritikus utak száma megnőhet, ilyenkor a belépő kritikus utak miatt a program várható átfutási ideje is bizonytalanabbá válhat. Ezért nem növeljük a tevékenységek tartalékidejét a szabad tartalékidőn felül, hiszen akkor szélsőséges esetben a teljes program összes tevékenysége kritikus úton lévő tevékenység lehet. Ezzel a módszerrel tehát költséget takaríthatunk meg, anélkül hogy a várható átfutási idő növekedne.

Ennél egy jobb megoldás, ami azt az esetet is figyelembe veszi, ahol az egyes tevékenységek változó költsége, illetve várható időtartama magasabb, mint a (legvalószínűbb) normál lefutási idő, illetve (az ehhez az értékhez tartozó) normál költség. Itt az elsőrendű cél a normál átfutási idő elérése. Ekkor az egyes tevékenységek várható lefutásait úgy módosítjuk, hogy az minimális változó költséggel járjon. A várható értéket tehát erre az értékre kell módosítani. Ha a minimális változó költséghez tartozó lefutási idő éppen a legvalószínűbb lefutási idő, akkor a tevékenységek várható értékét erre az értékre kell módosítani. (A 9-13 egyenletek megadják a szórások, illetve a lefutási idők változásának számításhoz használható képleteket.) Ezzel a módszerrel tehát szintén változó költséget takaríthatunk meg, az így meghatározott átfutási idővel megvalósított program minimális változó költséggel fog rendelkezni, és meg fog egyezni a CPM-, MPM-módszerekkel kiszámított normál átfutási idővel.

A továbbiakban feltesszük, hogy az időtartamok lefutásai és a változó költségük között függvénykapcsolat áll fenn. Az előzőekben vizsgált mennyiségek  $a_{i,j}$ ,  $m_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $t_{i,j}$  és  $\sigma_{i,j}$  most a  $vc_{i,j}$  változó költség függvényei.

Tegyük fel, hogy az alábbi ( $r_{1i,j}$ ,  $r_{2i,j}$ ) arányok nem változnak a költségnövekedés hatására:

$$r_{1i,j} = \frac{a_{i,j}}{t_{i,j}}, \quad r_{2i,j} = \frac{b_{i,j}}{t_{i,j}}, \quad (8)$$

Az alábbi mennyiségek tehát a következőképpen változnak (a változó mennyiségeket  $\sim$  jellel jelöltem):

Szórásnégyzet (standard bizonytalanságnégyzet) változása:

$$\tilde{u}^2(\tilde{t}_{i,j}) = \tilde{\sigma}_{i,j}^2 = \frac{1}{36} (r_{2i,j} - r_{1i,j})^2 \tilde{t}_{i,j}^2. \quad (9)$$

tehát, ha változó költség növekedése árán csökkentjük a  $t_{i,j}$  átlagos időtartamot, akkor ezzel egyenes arányban csökken a standard bizonytalanság (tevékenység szórása) is. Az arányossági tényező pedig:

$$\frac{1}{6} (r_{2i,j} - r_{1i,j}). \quad (10)$$

Úgyszintén arányos a  $t_{i,j}$  átlagos időtartammal a módusz változása:

$$\tilde{m}_{i,j} = \frac{1}{4} [6 - (r_{1i,j} - r_{2i,j})] \cdot \tilde{t}_{i,j}, \quad (11)$$

Az optimista, illetve pesszimista becslések változása az alábbi módon írható fel:

$$\tilde{a}_{i,j} = r_{1,i,j} \tilde{t}_{i,j}, \quad (12)$$

$$\tilde{b}_{i,j} = r_{2,i,j} \tilde{t}_{i,j}. \quad (13)$$

Az eloszlás paramétereinek becslése:

$$\alpha \approx 6 \frac{1 - r_{1,i,j}}{r_{2,i,j} - r_{1,i,j}}, \quad (14)$$

$$\beta \approx 6 \frac{r_{2,i,j} - 1}{r_{2,i,j} - r_{1,i,j}}. \quad (15)$$

Látható, hogy az eloszlás paramétereinek a várható időtartamok csökkenésétől függetlenek, így az időtartamok csökkenése esetén is (feltételezve, hogy  $r_1$ ,  $r_2$  arányok állandóak) azonos paraméterű (azonos „alakú”) eloszlással becsülhetők a lefutási idők (egy adott biztonsági szintet feltételezve).

Sztochasztikus költségtervezés sztochasztikus időtervezés esetén

A tervezés során általában nem csak az egyes tevékenységek várható időtartamáról, de a várható költség-, illetve erőforrásigényeiről sincs biztos információ. Általában ezeket is csak becsülni tudjuk. Hogy a költségek, illetve erőforrásigények becslésénél miért nem terjedt el az időbecsléshez hasonló sztochasztikus modell, annak számos oka van.

A költségek, illetve az erőforrásigények becslésére nincs általánosan elfogadott eloszlásfüggvény (mint például időtartamok becslésére a  $\beta$ -eloszlás). Változó költségek, illetve a fixköltségek valószínűleg más és más eloszlást követnek. Erőforrásigény-típusok (megújuló, nem megújuló erőforrások) szintén valószínűleg más és más eloszlást követnek.

Látható, hogy a fenti nehézségek miatt projektek esetén a költségek, illetve az erőforrásigények bizonytalanságát nagyon nehéz megbecsülni.

Termelési programok esetén azonban használhatjuk a 11.1.1-es fejezetben leírtakat. A gyártás során feljegyezzük a tevékenységek lefutási idejét, költség- és erőforrásigényeit. Ebből becsülhető a tevékenységek lefutási idejének várható értéke, és az átlag szórása (standard bizonytalansága), illetve a program várható átfutási ideje és a várható átfutási idő szórása (összetett standard bizonytalansága). Becsülni kell továbbá azt, hogy a kritikus úton lévő tevékenységek közül melyik tevékenységet mennyi idővel lehet csökkenteni, illetve hogy ez a lefutásiidő-csökkenés mennyi változó költség-növekedéssel jár. Ha ezek közül ugyanúgy, ahogy a CPM/COST, MPM/COST vagy a PERT/COST-módszernél a legkisebb (változó) költség-növekedéssel járó tevékenység időtartamát csökkentjük, és így módosítjuk a gyártást, akkor több gyártás esetén szintén becsülhetjük az egyes tevékenységek lefutási idejét, a várható lefutási idő szórását, a várható átfutási időt, illetve annak szórását, valamint a becslés (standard) bizonytalanságát. Ezt a folyamatot addig ismételhetjük, ameddig a kívánt átfutási időt (valamely biztonsági szint mellett) el nem érjük.

Ha más információk nincsenek az eloszlásokkal illetően, akkor projektek esetén várható érték, illetve szórási becslésére az előző megvalósított projektek szolgáltathatnak információt. Hasonló tevékenységek esetén becsülhető a tevékenységek lefutási idejének várható értéke, illetve a szórása. Vagyis a gyakorlatban ez azt jelenti, hogy amennyiben adott tevékenységeket elvégeztünk korábban más projektek keretében, akkor az ott szerzett tapasztalatokat (lefutási idő, költségigény, erőforrás-szükséglet) feljegyezve az előző fejezetekben leírt módon megbecsülhetjük a várható lefutási időt, a költségigényt és az erőforrás-szükségletet, illetve meghatározhatjuk ezen adatok standard bizonytalanságát. Minél több hasonló tevékenységet végeztünk el korábbi projektek megvalósítása során, annál pontosabban tudjuk ezeket az adatokat (lefutási időt, költség- és erőforrásigényt) meghatározni.

## Bizonytalan átfutási idejű projektek kezelése

A következőkben bemutatjuk, hogy hogyan kell egy projektet megtervezni, ha kezelni akarjuk a tevékenységek lefutási idejének bizonytalanságát is.

- **Első lépés:** A tevékenységek várható értékét úgy kell módosítani, hogy az a minimális változó-költséggel járó lefutási időre (itt most a móduszra, vagyis a legvalószínűbb lefutásra) essen. Ezzel tehát (várható) változó költséget takarítunk meg. Ekkor a változásokat az alábbi táblázatba lehet összefoglalni. A tevékenységidők változásával mind a költségszint, mind pedig az erőforrás-szükséglet változik (lásd részletesen a harmadik lépésnél). A várható lefutási idő változásának hatására változnak az intervallumok (optimista, illetve pesszimista becslések) is (9-13 egyenlet szerint).
- **Második lépés:** Rajzoljuk fel a PERT-hálót, és állapítsuk meg a tevékenységek átfutási idejét, illetve az átfutási idő szórásnégyzetét! Határozzuk meg a kritikus utat!

A háló felrajzolásához először meg kell határozni a logikai kapcsolatokat, a követő és a megelőző tevékenységeket. A logikai háló felrajzolása után először egy odafelé történő (progresszív) elemzés segítségével a PERT-módszernek megfelelően meghatározzuk a projekt várható átfutási idejét, majd egy visszafelé történő elemzéssel meghatározzuk a kritikus ut(ak)at. Ezután szintén odafelé történő elemzés segítségével meghatározzuk a projekt várható átfutási idejének szórásnégyzetét (összetett standard bizonytalanságának négyzetét), ami a kritikus ut(ak)on lévő tevékenységek várható lefutásainak szórásnégyzeteinek (standard bizonytalanságuk négyzetének) összege lesz. Ha több kritikus út is van, akkor óvatosságból a legnagyobb összetett standard bizonytalansággal számolunk a továbbiakban.

- **Harmadik lépés:** Csökkentsük a kritikus úton lévő tevékenységek várható lefutási idejét! Határozzuk meg a minimális átfutási idejű és a minimális összköltséggel járó programokat! A programok meghatározásához készítsünk táblázatot!

Az időtartamok csökkentésénél három szempontot kell figyelembe venni:

*Azon (kritikus úton lévő) tevékenység(ek) várható időtartamát csökkentjük, amelyek (várható) egységnyi (változó)költségnövekedése a legkisebb.*

*Megjegyzés:* Az egységnyi költségnövekedési tényezőt közvetlenül is megadhatjuk, vagy a következő képlettel számíthatjuk (lineáris költségnövekedés esetén):

$$\Delta vc = \frac{vc(r) - vc(n)}{n - r},$$

ahol  $r$  a roham- vagy minimális megvalósítási idő, amely mellett a tevékenység még elvégezhető.  $n$  pedig a normál megvalósítási idő, amely mellett az adott tevékenységet normál körülmények között elvégezhetjük. Feltettük a példában, hogy a minimális (várható) megvalósítási idő az eredeti időtartam becslésénél a tevékenység lefutásának optimista becslése, vagyis  $r=a$ , valamint hogy a normál megvalósítási idő a legvalószínűbb megvalósítási idővel egyezik meg, képlettel:  $n=m$ . Feltettük továbbá, hogy a normál lefutási időtől hosszabb lefutási idő szintén költségnövekedéssel jár (lineáris esetben hasonlóan az előzőhöz itt is számítható költségnövekedési tényező, amely azt mutatja, hogy egységnyi késés mennyi többletköltséggel jár). Ha a tevékenységek lefutási idő-változó költség függvénye nem lineáris, akkor folytonos esetben a költségnövekedési tényező, a költségfüggvény idő szerinti deriváltja, diszkrét esetben, pedig a differenciáltja lesz.

*Ha a költségnövekedési tényezők megegyeznek, akkor azon tevékenység időtartamát célszerű rövidíteni, amelynek rövidítésével nem alakul ki újabb kritikus út.*

Ugyanis a kritikus úton lévő tevékenységet nem szabad eltolni (hiszen ez a program átfutási idejének növekedéséhez vezetne), ezáltal erőforrásigényeit nem lehet későbbi időpontra ütemezni. Minél több kritikus tevékenységünk van, annál jobban „meg van kötve a kezünk”. Szélső esetben még megengedett megoldást sem tudunk találni az erőforrás-allokációs problémára. Ez pedig azt jelenti, hogy ebben az esetben az adott a költségszinten, adott lefutási időket, illetve korlátokat figyelembe véve nem lehet a programot határidőre teljesíteni. Sokszor előfordul, hogy a költségkeretünk szűkossége miatt nem

tudjuk, vagy nem éri meg a minimális átfutási idejű termelési programot megvalósítani, hanem valamilyen közbenső termelési programot választunk és valósítunk meg.

*Ha több tevékenység is teljesíti az előző két pont követelményeit, vagyis a költségnövekedési tényezőjük minimális, és nem lépnek be újabb kritikus utak az időtartamok csökkentése hatására (vagy bármely választás hatására ugyanúgy lesznek alternatív utak, amelyek kritikus utakká fognak válni), akkor azt a tevékenységet (azokat a tevékenységeket) választjuk, amely(ek)nek hatására az átfutási idő szórása (összetett standard bizonytalansága) a legnagyobb mértékben csökken.*

- **Negyedik lépés:** Rajzoljuk fel az erőforrás-terhelési diagramot! Keressünk megengedett, majd optimális erőforrás-allokációt! Ha eddig a pontig eljutottunk, akkor a problémának megfelelő erőforrás-allokációs algoritmust választhatunk. Számos problémát megoldhatunk (párhuzamos projektek közötti erőforrás-megosztás, többfajta erőforrás egyidejű kezelése stb.) az előző fejezetekben leírtak alapján. Itt egy megengedett megoldás keresése után (amelyet pl. a Microsoft Projekt programjával kereshetünk) egy célfüggvényt kell meghatározni. [6, 7]
- **Ötödik lépés:** A hálós-, illetve az erőforrás-tervezési technikák nemcsak a projekt tervezési szakaszban, hanem a megvalósítás nyomon követésére, ellenőrzésére is használhatók.

Amennyiben megváltozik egy tevékenység erőforrás-szükséglete, lefutási ideje vagy az erőforráskorlát, akkor on-line ütemezést kell alkalmaznunk. A projekt követésénél a hálóba a már lefutott tevékenységek tényleges lefutási idejét kell beírni, és a tevékenység szórását (standard bizonytalanságát) pedig nullának kell tekinteni. A tevékenységek lefutásának követése során így csökkenni fog az átfutási idő szórása is. A program végére a sztochasztikus hálóból egy determinisztikus háló lesz, mely megadja, hogy a tevékenységek ténylegesen mikor hajtódtak végre, mikor kezdődtek, és mikor fejeződtek be.

## ÖSSZEGZÉS

A tanulmányban bemutatott módszerek olyan – gyakorlatban felmerülő – problémákat is kezelni tudnak, amelyekre mindeztáig nem készültek módszerek, eljárások vagy szoftverek. Ezek az eljárások bármely – a projektmenedzsmentben használt (pl. Microsoft Project, CA-SuperProject, Primavera stb.) – szoftver által szolgáltatott megengedett megoldásból indulhatnak. Ezeket a megoldásokat egy adott cél (vagy célfüggvény) szerint a módszerünk minden lépésben javítja. Bármikor leállítható az algoritmus futása, és eredményül általában egy jobb (de semmiképpen sem rosszabb) megoldást kapunk. Több projektre, több erőforrást kezelve minimális összköltségű, optimális erőforrás-terhelésű programokat határozhatunk meg.

Ha a projekt tervezése során már figyelembe vesszük a paraméterek bizonytalanságát, akkor pontosabb becsléseket adhatunk a tevékenységek lefutási idejére, költségigényeire, illetve erőforrás-szükségleteire. Ezáltal pontosabban becülhetjük az összes várható költséget, illetve az összes erőforrás-szükségletet is. A bemutatott módszerekkel tehát már tervezéskor figyelembe vehetjük az egyes paraméterek bizonytalanságát, és ezáltal időt, költséget és erőforrásokat takaríthatunk meg.

## IRODALOM

- [1] **Kaufmann, A.–Desbazeille, G.:** A kritikus út módszerének matematikai alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, pp. 7–203.
- [2] **Schwindt, Ch.:** Generation of Resource Constrained Project Scheduling Problems Subject to Temporal Constraints. Technical Report, Report WIOR-543, 1998.
- [4] **Lockyer, K.–Gordon, J.:** Projektmenedzsment és hálós tervezési technikák. Kossuth Kiadó, 2000.
- [5] **Kosztján Zsolt–Bencsik Andrea:** Bizonytalan átfutási idejű projektek optimális erőforráselosztása. Verlag Dashöfer, 2003.
- [6] **Kosztján Zsolt–Bencsik Andrea–Hogyor András:** Működő projektek optimális erőforráselosztása. Verlag Dashöfer, 2002.



- [7] **Koszyán Zsolt–Bencsik Andrea–Hogyor András:** Egy új módszer alkalmazása idő-, erőforrás-, költségoptimalásra projektmenedzsmentben, illetve logisztikában. Logisztikai Évkönyv, 2002.
- [8] **Németh Lóránt:** Organizational and control methods of building processes (ERALL-2). É. M. SZÁMGÉP, 1966.
- [9] **Neumann, K.–Schwindt, Ch.:** Activity on node networks with minimal and maximal time lags and their application to make to order productionm. Operations Research Spektrum 19, 1997, *pp.* 206–217.
- [10] **Neumann, K.–Zhan, J.:** Heuristics for the minimum project duration problem with minimal and maximal time lags under fixed resource constraints. Journal of Intelligent Manufacturing 6, 1998, *pp.* 145–154.
- [11] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. International Organization for Standardisation 1993.